APLICATII FUNCTII SI ECUATII

1)Fie *f:R->R*, *f*(x) = $x^3 - 2$. Să se arate că funcția este bijectivă şi sa se determine inversa sa f^{-1}.

2)Fie *f,g,h :N->N* cu *f* (x) = $x^2 + 1$, *g* (x) = 3x+1, *h* (x) = x+5 . Să se arate ca funcțiile sunt injective şi nu sunt surjective.

3)Să se rezolve ecuațiile:

a) $4^x = 1024$

b) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$

c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$

4.Să se rezolve ecuațiile:

d) $\sqrt{x+3} = 4$

e) $\sqrt{2x-1} - x = -8$

f) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = 2$

5.Să se rezolve ecuațiile:

g) $\sqrt[3]{3x-4} = 2$

h) $\sqrt[3]{x-3} = -1$

i) $\sqrt[3]{1+\sqrt{6x+1}} = 2$

6.Să se rezolve ecuațiile:

j) **Aflați** x **din egalitatea:** $\log_a x = 2 \cdot \log_a 7 + 3 \cdot \log_a 6 - 4 \cdot \log_a 5$

k) $\log_2 (3x-5) = 2$

l) $\log_{0,5} (x-1) = \log_{0,5} (x^2 - x - 16)$

m) $\log_x (x+3) = \log_x (x^2 + 1)$

7.Să se rezolve inecuațiile:

n) $(0,25)^{x-4} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x$

b) $\cos(x+\frac{\pi}{5})+1=0$; **c)** $\sin x+\cos x = \sqrt{2}$;

d) $tg(x+\frac{\pi}{6})=tg(\frac{\pi}{3}-2x)$; **e)** $\frac{\sqrt{3}}{2} tg^2 x - (1+\sqrt{3}) tg\, x + 1 = 0$

e)$\sin(x+\frac{\pi}{5})+1=0$; **g)** $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$;

f)Rezolvați ecuația $4^x+2^{2x+1} * m = m+2$ **pentru m =1.**

g) Rezolvați ecuația $m * 2^x+4^x = m+25$ **pentru m =3.**

8.Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$; **b)** $\frac{\sqrt{x-1}}{5-x} \geq 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2$ **;**

d) **(** $\sqrt{2}$ **+1)^x +(** $\sqrt{2}$ **-1)^x** ≤ 2 **;**

e) $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1} \leq 6$

9.Rezolvati sistemele de ecuatii;

a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 16 \\ 2^{x+y} = 125 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ xy = 27 \end{cases}$

INDICATII SI RASPUNSURI

1) **Injectivitatea:** fie $x_1 \neq x_2$, numere reale, presupunem ca $f(x_1)=f(x_2)$⇨ $x_1^3-2=x_2^3-2$⇨ $x_1^3=x_2^3$⇨ $x_1=x_2$, fals ⇨ $f(x_1) \neq f(x_2)$ adica functia este injectiva.
   Surjectivitatea; $\forall$ y$\in$R, $\exists$ x$\in$R, astfel incat f(x)=y ⇨x^3-2=y ⇨x^3=y+2 ⇨x=$\sqrt[3]{y+2}$, ce are sens petru toate numerele reale, deci functia este surjectiva deci bijectiva deci inversabila. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$.
2) ***f*** ***:N->N*** ***f*** **(x) = x^2 + 1**
   Injectivitatea: fie $x_1 \neq x_2$, numere naturale, presupunem ca $f(x_1)=f(x_2)$⇨ $x_1^2+1=x_2^2+1$ ⇨ $x_1^2=x_2^2$ ⇨ $x_1^2-x_2^2=0$ ⇨ $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$ ⇨ $x_1=x_2$ fals ⇨ $f(x_1) \neq f(x_2)$ adica functia este injectiva. $x_1=-x_2$ nu poate avea loc pentru ca numerele sunt naturale.
   Surjectivitatea; $\forall$ y$\in$R, $\exists$ x$\in$R, astfel incat f(x)=y ⇨x^2+1=y ⇨x^2=y-1 ⇨x=$\sqrt{y-1}$, ce nu are sens petru toate numerele naturale, y-1≥ 0 ⇨ y≥ 1 deci functia nu este surjectiva.
3) **Să se rezolve ecuațiile:**

   o) **4^x = 1024** ⇨$4^x=4^5$ ⇨x=5

   p) $2^{x^2-6x-2,5}$ **=16**$\sqrt{2}$ ⇨ $2^{x^2-6x-2,5}=2^{4+1/2}$ ⇨x^2-6x-2,5=4,5 ⇨ x^2-6x-7=0, Δ=36+28=64
   x_1=(6+8)/2=7, x_2=(6-8)/2=-1

   q) **3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3}** = 13 ⇨3^x *3^{-1}+3^x *3^{-2}+3^x *3^{-3}=13 ⇨3^x($\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$)=13

   ⇨$3^x=13\frac{27}{13}$ ⇨ $3^x=27=3^3$ ⇨x=3.

4) **Să se rezolve ecuațiile:**

   a. $\sqrt{x+3}$ **= 4.** Conditiile de existenta pentru radical: x+3 ≥ 0 ⇨x$\geq$-3.
   Revenind la ecuatie ,eliminam radicalul prin ridicare la patrat si deci obtinem x+3=16 ⇨x=13$\geq$-3.

   b. $\sqrt{2x-1}-x=-8$ **;** Conditiile de existenta pentru radical: 2x-1 ≥ 0 ⇨x$\geq$1/2.
   Revenind la ecuatie $\sqrt{2x-1}=x-8$ ⇨2x-1=x^2-16x+64 ⇨ x^2-18x+65=0 ⇨ Δ= 64, x_1=13, x_2=5.

c. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}=2$ **;** Conditiile de existenta pentru radicali:4-x$\geq$0 si x-2$\geq$0 ⇨x$\in$(2;4). Revenind la ecuatie, avem $\sqrt{4-x}=2-\sqrt{x-2}$ si eliminam radicalii prin ridicare la patrat in ambii membrii, obtinem 4-x = 4 -4 $\sqrt{x-2}$ +x-2 ⇨4$\sqrt{x-2}$ = 2x -2 ⇨ 4(x-2) = x^2 -2x +1 ⇨

x^2 -6x +9 = 0 ⇨x_1 =x_2=3

5) Să se rezolve ecuațiile:

a. $\sqrt[3]{3x-4}=2$ eliminam radicalul prin ridicare la puterea 3 ⇨3x-4=8 ⇨x= 4

b. $\sqrt[3]{x-3}=-1$ eliminam radicalul prin ridicare la puterea 3 ⇨x-3 = -1 ⇨x= 2

c. $\sqrt[3]{1+\sqrt{6x+1}}=2$ eliminam radicalul prin ridicare la puterea 3 ⇨

1+$\sqrt{6x+1}$= 2 ⇨ $\sqrt{6x+1}$=1 ⇨6x+1=1⇨ 6x=0 ⇨ x=0

d. $\sqrt{6x+1}$= 1 ⇨ 6x+1 =1 ⇨x=0

6) Să se rezolve ecuațiile:

a. Aflați x **din egalitatea:** $\log_a x = 2\cdot\log_a 7+3\cdot\log_a 6-4\cdot\log_a 5$ ⇨

$\log_a x = \log_a (7^2*6^3)/ 5^4$ ⇨ x= $(7^2*6^3)/ 5^4$

b. $\log_2(3x-5)=2$; C.E. 3x-5>0 ⇨ x > 5/3 si revenind la ecuatie avem 3x-5=4 ⇨ x= 3.

c. $\log_{0,5}(x-1)=\log_{0,5}(x^2-x-16)$**;** C.E. x-1 > 0 si x^2-x-16 > 0 ⇨ x >1 si x $\in$(-∞;-3) U (4;+∞) ⇨ x $\in$ (4;+∞) si revenind la ecuatie obtinem x-1 = x^2-x-16 ⇨ x^2 -2x -15 = 0 ⇨ Δ= 64 si deci x_1=5 , x_2 =3.

$\leq$

d. $\log_x(x+3)=\log_x(x^2+1)$**.** C.E. x+3 > 0 si x^2+1 > 0 ⇨ x >-3. Din injectiviitatea functiei logaritmice avem x+3 = x^2 +1 ⇨ x^2 –x-2=0 ⇨x_1=5, x_2=-4.

7) Să se rezolve inecuațiile:

a) (0,25) $^{x-4}\leq\left(\frac{1}{16}\right)^x$ ⇨(1/4)$^{x-4}$ $\leq$(1/4)^{4x} ⇨x-4=4x ⇨ 3x=-4 ⇨ x=-4/3.

b) cos(x+$\frac{\pi}{5}$**)+1=0** ⇨(x+π/5) =$\pm$ arccos(-1) + 2k π, $\forall$ k$\in$Z ⇨

x= - π/5$\pm$ π + 2k π, $\forall$ k$\in$Z

c) sin(x+$\frac{\pi}{5}$**)+1= 0** ⇨(x+π/5) = $(-1)^k$arcsin(-1) + k π, $\forall$ k$\in$Z ⇨ x= - π/5- π/2+ k π, $\forall$ k$\in$Z ⇨x=-7 π /10 + k π, $\forall$ k$\in$Z

d) tg(x+$\frac{\pi}{6}$**)=tg(**$\frac{\pi}{3}$**-2x)** ⇨(x+$\frac{\pi}{6}$)=($\frac{\pi}{3}$-2x) + k π, $\forall$ k$\in$Z ⇨x= $\frac{\pi}{18}$+ k π/3, $\forall$ k$\in$Z

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **tg²x –(1+**$\sqrt{3}$ **)tg x +1=0** ⇨notam tgx=t ⇨ $\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$ –(1+$\sqrt{3}$)t +1=0 ⇨ Δ= 4

⇨x_1=(3+$\sqrt{3}$)/3 si x_2=(-3+$\sqrt{3}$)/3

f) sin x+cos x = $\sqrt{2}$ ⇨coeficientul functiei cos este 1 si-l vom inlocui cu tg $\frac{\pi}{4}$ ⇨

$$\sin x+ \text{tg}\,\frac{\pi}{4}*\cos x=\sqrt{2} \Rightarrow \sin x*\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}*\cos x = 1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow (x+\frac{\pi}{4}) = (-1)^k*\frac{\pi}{2}+ k\pi,\ \forall k\in Z. \Rightarrow x= -\frac{\pi}{4}+(-1)^k*\frac{\pi}{2}+ k\pi,\ \forall k\in Z.$$

g) cos x-sin x = - $\sqrt{2}$ ⇨coeficientul functiei sin este 1 si-l vom inlocui cu tg $\frac{\pi}{4}$ ⇨

$$\cos x- \text{tg}\,\frac{\pi}{4}*\sin x=\sqrt{2} \Rightarrow \cos x*\cos\frac{\pi}{4} -\sin\frac{\pi}{4}*\sin x = 1 \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{4}) =1 \Rightarrow$$

$$(x+\frac{\pi}{4})= \pm \arccos 1+2k\pi, \forall k\in Z \Rightarrow x= -\frac{\pi}{4}+2k\pi, \forall k\in Z.$$

h) Rezolvați ecuația $4^x+2^{2x+1} * m = m+2$ pentru m =1.

$4^x+2^{2x}*2*1=1+2 \Rightarrow 3*4^x = 3 \Rightarrow 4^x= 1 \Rightarrow x=0.$

i) Rezolvați ecuația $m * 2^x+4^x = m+25$ pentru m =3.

$3* 2^x + 2^{2x} =3+25$, notam 2^x cu t si atunci ecuatia va fi, $t^2 +3t- 28 = 0 \Rightarrow \Delta= 121$ ⇨

$t_1= 4$ deci $2^x =4 \Rightarrow x=2$ sau $t_2 =-7$ deci ecuatia $2^x =-7$ nu admita solutii.

8)Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}$**<1;**

CE **:** $\begin{cases} 24-2x-x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ => $x \in [-6,4] \setminus \{0\}$

$\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} -^{x)} 1 < 0$ => $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}-x}{x} < 0$ avem $\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} < 0$

$f_{1(x)} = \sqrt{24-2x-x^2} - x$ **;** $f_{1(x)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{24-2x-x^2} = x\,|^2$

$24-2x-x^2=x^2 \Rightarrow -2x^2-2x+2$ cu rădăcinile $x_1=-4$; $x_2=3$. $f_{2(x)}=0 \Leftrightarrow x=0$

x	**-6 -4 0 3 4**
$f_{1(x)}$	**- - - - - - - - -0 + + + + 0- - - - - -**
$f_{2(x)}$	**- - - - - - - - - - - - 0+ + + + + + + +**
$E_{(x)}$	+ + + + +**0- - - | + +0- - - - - -**

$E_{(x)}$<0 =>S=(-4,0) $\cup$ (3,4)

b) $\frac{\sqrt{x-1}}{5-x} \geq 0$ **CE.** $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x \neq 0 \end{cases}$ => $x \in [1,+\infty) \setminus \{5\}$

E(x)= $\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}}; E_{(x)} \geq 0$ **f1(x)**= $\sqrt{x-1};\ f_{1(x)} = 0 \Rightarrow x = 1$. **;** $f_{2(x)} = 5 - x;\ f_{2(x)} = 0 \Rightarrow x = 5$

x	**1 5 +∞**
$f_{1(x)}$	**0** + + + + + + + + + + + + + + +
$f_{2(x)}$	+ + + + + + **0**- - - - - - - - - - - -
$E_{(x)}$	**0** + + + + + | - - - - - - - - - - - -

=>S=[1,5)

c) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$ **;**

$\frac{\sqrt{x-1}}{5-x} \geq 0$ **CE.** $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,+\infty) \setminus \{5\}$

E(x)= $\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}}; E_{(x)} \geq 0$ **f1(x)**= $\sqrt{x-1};\ f_{1(x)} = 0 \Rightarrow x = 1$. **;** $f_{2(x)} = 5 - x;\ f_{2(x)} = 0 \Rightarrow x = 5$

x	**1 5 +∞**
$f_{1(x)}$	**0** + + + + + + + + + + + + + + +
$f_{2(x)}$	+ + + + + + **0**- - - - - - - - - - - -
$E_{(x)}$	**0** + + + + + | - - - - - - - - - - - -

=>S=[1,5)

d) $(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x \leq 2$

Notãm $(\sqrt{2}+1)^x = y > 0$

$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{y}$ **=>** ${}^{y)} y + \frac{1}{y} - {}^{y)} 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{y} \leq 0$

pt. y>0 =>y^2-2y+1<0 => ec. ataşatã este y^2-2y+1 => Δ=0 =>y_1=y_2=1 are semn constant(pozitiv)=>y=1(singura sol.)

revenind la substituție avem: $(\sqrt{2}+1)^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$.

e) $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[8]{x+1} \leq 6$. **CE.** $x + 1 \geq 0; x \geq -1; x \in [-1,+\infty)$

Notãm $\sqrt[4]{x+1} = a^2 > 0$ $(x+1)^{\frac{1}{4}} = a^2$

$\sqrt[8]{x+1} = a > 0$ $(x+1)^{\frac{1}{8}} = a$

a^2 +a-6≤ 0 Δ =25 $a_{1,2} = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [-3,2]$.

revenind la substituție $\sqrt[8]{x+1} = 2\ |^8$ **;** x+1=2^8;x=255 =>S=[-1,255]

9) Rezolvati sistemele de ecuatii;

$$a)\begin{cases}2^{2x+y}=16\\25^{x+y}=125\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{2sx+y}=2^4\\5^{2x+2y}=5^3\end{cases}=>\begin{cases}2x+y=4\\2x+2y=3\,|\cdot(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=4\\-2x-2y=-3\end{cases}=>1-y=1=>y=-1$$

2x+y = 4 =>**x=**$\frac{4-y}{2} => x=\frac{4+1}{2}; x=\frac{5}{2} => S=\{(\frac{5}{2},-1)\}.$

b) $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}=2\\xy=27\end{cases}$ $\quad \sqrt[3]{x}=a \quad x=a^3$ $\quad \sqrt[3]{y}=b \quad y=b^3$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\a^3b^3=3^3\end{cases}$

$$\begin{cases}a-b=2\\ab=3\end{cases}\Leftrightarrow a_1=3; b_1=1; a_2=-1; b_2=-3 => S=\{(27,1);(-1,-27)\}$$