

APLICATII VECTORI SI GEOMETRIA DREPTEI IN PLAN

CLASA a X-a FRECVENTA REDUSA

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.
2. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC , unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.
3. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii $\vec{u} \perp \vec{v}$.
4. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.
5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = -(5a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.
6. Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ știind că $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.
7. Se știe că, în triunghiul ABC , vectorii $\vec{AB} + \vec{AC}$ și $\vec{AB} - \vec{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.
8. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC , știind că $A(-1,0), B(0,2), C(2,-1)$.
9. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.
10. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x-4y+1=0$.
11. Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.
12. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.
13. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 5x-4y+1=0$.
14. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.
15. Să se calculeze $\vec{AB} * (\vec{AC} + \vec{BC})$, știind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ și $C(1, 2)$.
16. Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC , unde $A(1, 2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.
17. Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB , știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.
18. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1, 2)$ pe dreapta $d: x+y-1=0$.
19. Se consideră dreptele paralele de ecuații $d1: x-2y=0$ și $d2: 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.
20. Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC , știind că $A(0, 9)$, $B(2,-1)$ și $C(5,-3)$.
21. Să se calculeze $(2\vec{i} + 5\vec{j}) * (3\vec{i} - 4\vec{j})$.
22. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$ și $B(1,-1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB .
23. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1,3)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
24. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1), C(1,3)$ și $D(a,4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
25. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$.
26. Se consideră dreptele de ecuații $d1: 2x+3y+1=0$, $d2: 3x+y-2=0$ și $d3: x+y+a=0$. Să se determine a real, pentru care cele trei drepte sa fie concurente.
27. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 3)$ și $C(-1, 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC .

28. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - 4\vec{j}$ să fie coliniari.

29. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, r \in \mathbf{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + r\vec{b}$.

REZOLVARE

1. $AB = \sqrt{(2-m)^2 + (m+2)^2} = 4 \Rightarrow 2m^2 = 8 \Rightarrow m = \pm 2.$

2. Fie M mijlocul segmentului

BC $\Rightarrow M(1,3)$ deci ecuatia medianei va fi AB: $\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow 4x - 3y + 7 = 0.$

3. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow m(m-2) - 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 3\}.$

4. Fie h dreapta cautata. Pentru ca;

$h \perp d \Rightarrow m_h = \frac{-1}{m_d}$ si cum $m_d = \frac{2}{3} \Rightarrow m_h = -\frac{3}{2} \Rightarrow h: y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 6).$

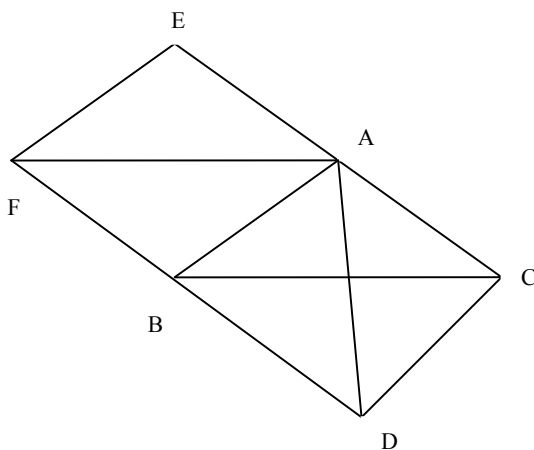
5. Idem 3.

6. ABCD paralelogram atunci diagonalele au acelasi

mijloc $\Rightarrow -2 + 8 = 7 + x_D \Rightarrow x_D = -1$, si $9 - 3 = -4 + y_D \Rightarrow y_D = 10 \Rightarrow D(-1, 10).$

7.

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AE} = \vec{AF} \Rightarrow AD = AF \Rightarrow \square AFD$ isoscel \Rightarrow mediana AC va fi si inaltime $\Rightarrow AC \perp AB \Rightarrow \square ABC$ dreptunghic.



$$8. x_G = \frac{-1+7+2}{3} = \frac{8}{3}, y_G = \frac{0-4-1}{3} = \frac{-5}{3}.$$

$$9. \cos \alpha = \frac{5*2-4*3}{\sqrt{5^2+(-4)^2} * \sqrt{2^2+3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{41} * \sqrt{13}} < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ deci unghi obtuz.}$$

$$10. d(A, d) = \frac{|3*3-4*0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$11. AB: \frac{x+5}{2+5} = \frac{y-4}{3-4} \Rightarrow x+7y-23=0$$

$$12. \text{ Fie d dreapta cautata. } d \perp CD \Rightarrow m_d = m_{CD} = \frac{1+3}{2+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow d: y-2 = \frac{4}{3}(x+2).$$

13. Fie h dreapta cautata.

$$h \perp d \Rightarrow m_h * m_d = -1, \text{ cum } m_d = \frac{5}{4} \Rightarrow m_h = -\frac{4}{5} \Rightarrow h: y-1 = -\frac{4}{5}(x+1).$$

$$14. \vec{u} \text{ coliniar cu } \vec{v} \text{ daca } \frac{a}{4} = \frac{3}{a+4} \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a \in \{-6, 2\}.$$

$$\vec{AB} = (4+3)\vec{i} + (-3-4)\vec{j} = 7\vec{i} - 7\vec{j}$$

$$15. \vec{AC} = (1+3)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{BC} = (1-4)\vec{i} + (2+3)\vec{j} = -3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{AB} * (\vec{AC} + \vec{BC}) = (7\vec{i} - 7\vec{j}) * (\vec{i} + 3\vec{j}) = 7 - 21 = -14.$$

16. Idem ex. 2.

17. Se calculeaza lungimile laturilor cu formula de la ex. 1 si se aduna.

18. Idem ex. 13.

19. Dreptele fiind paralele distanta ceruta reprezinta distanta de la oricare punct al dreptei d_1 la d_2 .

Se observa ca punctul $O(0,0)$ apartine dreptei d_1

$$\text{deci } d(d_1, d_2) = d(O, d_2) = \frac{|2*0-4*0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

20. Notam cu h_b inaltimea din B a

$$\text{triunghiului. } h_b \perp AC \Rightarrow m_{h_b} = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-(0-5)}{9+3} = \frac{5}{2} \Rightarrow h_b: y+1 = \frac{5}{2(x-2)}.$$

$$21. (2\vec{i} + 5\vec{j}) * (3\vec{i} - 4\vec{j}) = 2*3 + 5*(-4) = -14.$$

22. Mediatoarea fiind dreapta perpendiculara dusa prin mijlocul segmentului

$$\text{avem; } m_d = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-(1+1)}{-1-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow d: y-1 = \frac{1}{2(x-0)}.$$

$$23. \text{ Ecuatia dreptei cautate va fi; } y - y_C = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_C) \Rightarrow y - 3 = \frac{2}{-3}(x - 1).$$

$$24. AB \perp CD \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{2}{-3} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow 2a - 2 = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$25. \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC} \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

26. Presupunem

$$d_1 \cap d_2 = \{A\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, -1).$$

Dreptele sunt concurente daca $A \in d_3 \Rightarrow 1 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = 0$.

$$27. AC = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 4.$$

$$28. 6\vec{i} + 2\vec{j} = p(\vec{i} + \vec{j}) + r(\vec{i} - \vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} p + r = 6 \\ p - r = 2 \end{cases} \Rightarrow p = 4 \text{ si } r = 2.$$

NOTA : Exerciții similare găsiți pe www.subiecte2009.edu.ro.