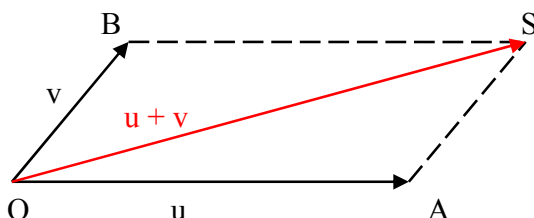


## Vectori si operatii

### 1. Adunarea vectorilor

➤ Fie  $u$  si  $v$  doi vectori in plan de directii diferite . Fie  $O$  un punct in plan . Construim  $OA=u$  si  $OB=v$  . Fie  $S$  un al patrulea varf opus lui  $O$  al paralelogramului cu trei varfuri in  $O, A$  si  $B$  .



$OS = u + v$  ( regula paralelogramului )

- 1) Daca  $u$  si  $v$  sunt doi vectori de aceeasi directie si acelasi sens atunci  $u+v$  este vectorul de aceeasi directie si sens si de lungime  $|u| + |v|$  .
- 2) Daca  $u$  si  $v$  au aceeasi directie si sensuri opuse atunci daca  $|u| > |v|$  vectorul  $u+v$  are aceeasi directie cu vectorii  $u$  si  $v$  , are sensul vectorului  $u$  si lungimea  $|u| - |v|$  .
- 3) Daca  $u$  si  $v$  au aceeasi directie , sensuri opuse si  $|u| < |v|$  atunci  $u+v$  este vectorul de aceeasi directie cu sensul vectorului  $v$  si cu lungimea  $|v| - |u|$  .

- Se stie ca intr-un  $\Delta$  ,  $AC < AB + BC$  si atunci  $|u+v| < |u| + |v|$  .
- Cand  $A, B, C$  sunt colineare si vectorii  $AB$  si  $BC$  au acelasi sens atunci  $|u+v| = |u| + |v|$  . Deci in general  $|u+v| \leq |u| + |v|$  pentru orice 2 vectori  $u$  si  $v$  egalitatea avand loc numai daca  $u$  si  $v$  sunt coliniari si au acelasi sens .

#### ➤ Proprietatile adunarii :

1.  $(u+v) + w = u + (v+w)$  – asociativitate ;
  2.  $u+v = v+u$  – comutativitate ;
  3. exista  $0$  , a.i. oricare ar fi  $v$  ,  $v+0 = 0+v = v$  – element neutru ;
  4. oricare ar fi vectorul  $v$  exista  $(-v)$  a.i  $v+(-v) = (-v)+v = 0$  – element sincretic ;  
(  $-v$  ) = opusul lui  $v$  , are aceeasi directie , lungime dar sensul e opus .
- $|u| + |v| = \sqrt{(u^2 + v^2 + 2uv \cdot \cos \alpha)}$  ;

### 2. Inmultirea unui vector cu un scalar

- Fie  $\alpha$  care apartine lui  $\mathbf{R}$  ,  $v$  - vector  $\Rightarrow \alpha v$  se obtine din  $v$  astfel :
  - a) pentru  $\alpha > 0$  vectorul  $\alpha v$  are aceeasi directie cu  $v$  , acelasi sens si lungimea =  $\alpha|v|$  ;
  - b) pentru  $\alpha < 0$  vectorul  $\alpha v$  are aceeasi directie cu  $v$  , sens opus acestuia si lungimea  $|\alpha| \cdot |v|$  ;
  - c) pentru  $\alpha = 0$   $\Rightarrow 0 \cdot v = 0$  ;

#### ➤ Proprietatile inmultirii unui vector cu un scalar :

Fie  $\alpha, \beta$  apartin lui  $\mathbf{R}$  ,  $u, v = 2$  vectori ;

1.  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$  ;
2.  $\alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u$  ;
3.  $1 \cdot (v) = v$  ;
4.  $0 \cdot (v) = 0$  ;
5.  $\alpha \cdot 0 = 0$  ;

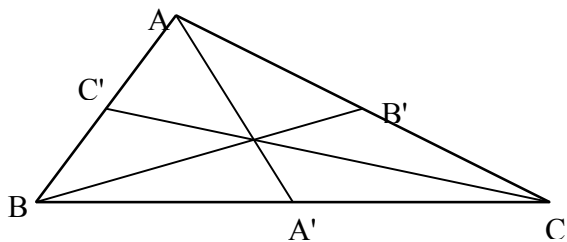
- Daca  $\alpha = -1$  vectorul  $(-v)$  se numeste opusul vectorului  $v$  si se obtine din acesta pastrandu-i directia si modulul , dar schimbandu-i sensul .

Teorema : 2 vectori nenuli sunt paraleli ( sau coliniari ) daca unul se obtine din celalalt prin inmultire cu un scalar nenul .

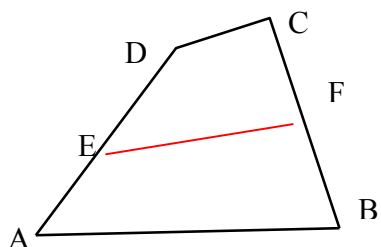
$u, v \neq 0$

$u \parallel v \Leftrightarrow$  exista  $\alpha$  apartinand lui  $\mathbf{R}$  a.i.  $u = \alpha v$  ;

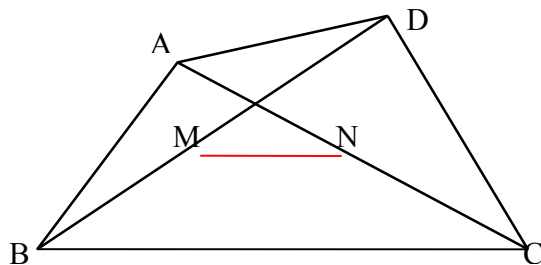
- Daca  $A', B', C'$  , sunt mijloacele laturilor  $\Delta ABC$  atunci  $AA' + BB' + CC' = 0$



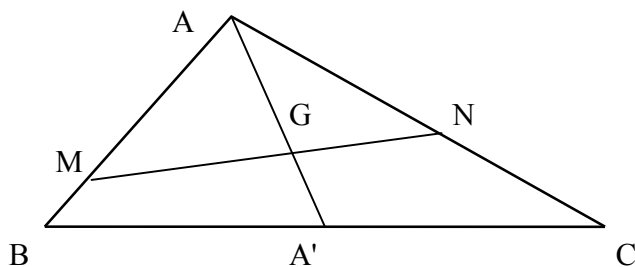
- Intr-un patrulater segmentul ce uneste mijloacele a doua laturi este egal cu semisuma bazelor ( $EF=1/2(AB+DC)$ );
- Daca in rel. demonstrata trecem la norme  $\|EF\|=1/2 (\|AB\|+\|DC\|)\leq 1/2(\|AB\|+\|DC\|)$ ;
- Egalitatea are loc  $\Leftrightarrow$  vectorii AB si CD sunt coliniari si de acelasi sens  $\Leftrightarrow AB \parallel DC \Leftrightarrow ABCD$  – trapez ;
- In general  $FE \leq 1/2(AB+DC)$  – intr-un patrulater ;
- Egalitatea are loc in trapez .



- Intr-un patrulater segmentul ce uneste mijloacele celor doua diagonale este egal cu semidiferenta bazelor ( $MN=1/2(BC-AD)$ );



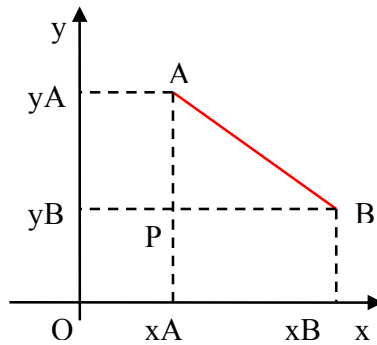
- Intr-un  $\Delta ABC$  , M apartine BC a.i.  $MB/MC=k \Rightarrow AM=1/(k+1)AB-k/(k+1)AC$  ;
- Caz particular  $MB=MC \Rightarrow$  mediana  $AM=1/2(AB+AC)$  ;
- Fie G = c.g.  $\Delta ABC$  , M – un punct in plan , atunci  $MA+MB+MC=3MG$  ;
- Fie H= ortocentrul  $\Delta$  inscris in  $C(O,r)$  , atunci  $HA+HB+HC=2HO$  ;
- $H,G,O$ -coliniare si  $OH=3OG$  ;
- Dreapta care contine aceste trei puncte ( c.c.circumscrie – O , centrul de greutate – G si ortocentrul – H ) se numeste dreapta lui Euler .
- Intr-un  $\Delta$  , G=c.g. , M apartine lui AB , N apartine lui AC , si MN trece prin G  $\Rightarrow MB/MA + NC/NA = 1$  .



## Geometria analitica a dreptei

### 1. Geometria analitica a dreptei – distanta dintre doua puncte

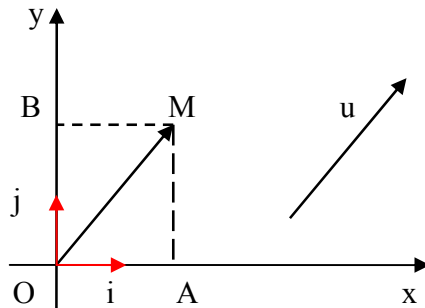
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



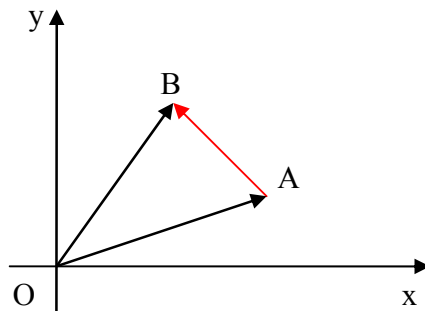
### 2. Elemente de geometrie analitica

➤ Se numeste vector al dreptei  $d$  un vector de lungime 1, care are directia dreptei  $d$ . Daca  $A$  apartine lui  $d$  ii asociem un numar real, unic  $x$ , numit coordonata sa. Atunci  $OA = x \cdot i$ . Daca  $x > 0$  atunci  $A$  este in sensul pozitiv al axei  $Ox$ . Daca  $x < 0$  atunci  $A$  este in sensul negativ al axei  $Ox$ .

➤ Fie  $xOy$  un sistem de axe ortogonale. Fie  $i$  si  $j$  versorii axelor. Fie  $u$  un vector in plan. Orice vector  $u$  poate fi scris in mod unic  $u = x \vec{i} + y \vec{j}$

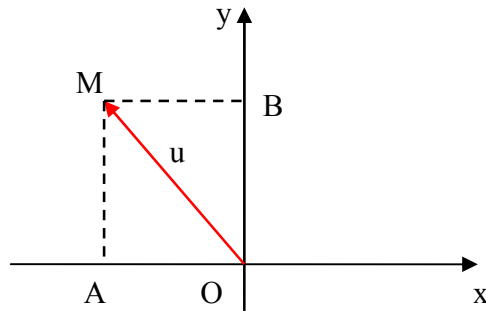


➤  $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$



### 3. Modulul uni vector

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |\vec{u}| = \|\vec{u}\| \quad |\vec{AB}| = \|\vec{AB}\| = AB$$



### 4. Suma a doi vectori

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \\ \vec{v} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \\ \vec{u} + \vec{v} &= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} \end{aligned}$$

### 5. Conditia de paralelism

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow x_1/x_2 = y_1/y_2, \text{ pt. } x_2, y_2 \neq 0$$

### 6. Conditia de coliniaritate a 3 puncte

$$A, B, C - \text{coliniare} \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1) = (y_2 - y_1)/(y_3 - y_1)$$

### 7. Conditia de perpendicularitate

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

### 8. Coordonatele mijlocului unui segment

$$\begin{aligned} x_M &= (x_A + x_B)/2 \\ y_M &= (y_A + y_B)/2 \end{aligned}$$

### 9. Coordonatele centrului de greutate al unui $\Delta$

$$\begin{aligned} x_G &= (x_A + x_B + x_C)/3 \\ y_G &= (y_A + y_B + y_C)/3 \end{aligned}$$

### 10. Ecuația dreptei în plan

➤ Graficul funcției de gradul I,  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , cu  $a \neq 0$  este o dreaptă formată din punctele de coordonatele  $(x, y)$  unde  $y = ax + b$ . Orice dreaptă este bine determinată de două puncte distincte ale sale.

- Dacă  $a = 0$ , dreapta de ecuație  $y = b$  este orizontală dusă prin  $b$ ;

- Dacă  $a \neq 0$  dreapta de ecuație  $y = ax + b$  este oblică;

- Mai există dreapta verticală de ecuație  $x = c$ .

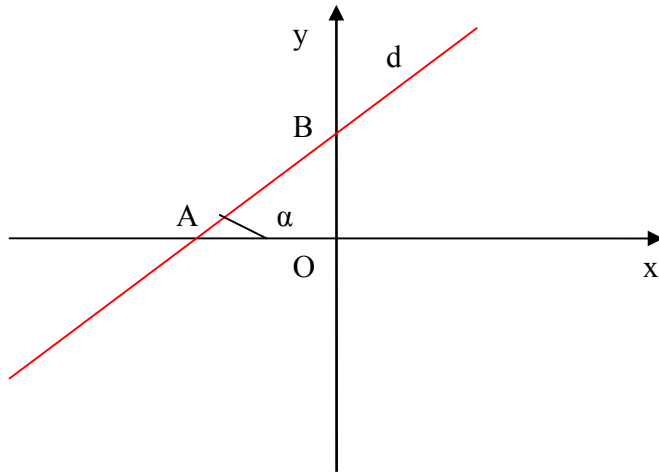
### 11. Ecuația dreptei care trece printr-un punct dat și are o direcție dată

➤ Ecuația dreptei care trece printr-un punct  $A(x_0, y_0)$  și are direcția vectorului  $\vec{u} = p\vec{i} + q\vec{j}$  este  $(x - x_0)/p = (y - y_0)/q$ ,  $p, q \neq 0$

➤ Dacă  $p = 0 \Rightarrow u = q\vec{j} \Rightarrow d \parallel Oy$  și dreapta este verticală cu ecuația  $x = x_0$

➤ Dacă  $q = 0 \Rightarrow u = p\vec{i} \Rightarrow d \parallel Ox$  și dreapta este orizontală cu ecuația  $y = y_0$

## 12. Coeficientul unghiular . Panta unei drepte .



- Fie d o dreapta in sistemul de axe xOy . Unghiul  $\alpha$  format de dreapta d cu sensul pozitiv al axei Ox se numeste coeficientul unghiular al dreptei d .
- Dreapta  $d: y=mx+n$  are panta  $m=\text{tg } \alpha$  , unde  $\alpha$  = unghiul format de dreapta d cu sensul pozitiv al axei Ox .
- Ecuatia dreptei care trece printr-un punct dat  $A(x_0, y_0)$  si are panta data m , este  $y-y_0=m(x-x_0)$ .

## 13. Conditia de paralelism a doua drepte

- $d_1 : y=m_1x+n_1$   
 $d_2 : y=m_2x+n_2$

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ ( au aceeasi panta )}$$

## 14. Conditia de perpendicularitate a doua drepte

- $d_1 : y_1 = m_1x + n_1$   
 $d_2 : y_2 = m_2x + n_2$   
 $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 * m_2 = -1$

## 15. Ecuatia dreptei care trece prin 2 puncte date

- Ecuatia dreptei care trece prin 2 puncte date A,B =  $\overline{AB} : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

- CONCLUZIE : Ecuatia generala a dreptei d :  $ax+by+c=0$  unde  $a^2+b^2 \neq 0$  .