Unitate de învățare: NUMERE COMPLEXE

<u>Probleme propuse:</u>

1) Să se determine numerele complexe z, astfel încât:

   a) $|z| - 2z = 2 - 4i$ b) $|z| + z = 3 + 4i$

2) Să se determine numerele complexe z, astfel încât:

$$\left|\frac{z-12}{zi+8}\right| = \frac{5}{3} \text{ şi } \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$$

3) Să se reprezinte în planul complex numerele:

   a) $z_1 = (2+3i)\cdot(3-5i)$ b) $z_2 = \dfrac{1+3i}{3+2i}$

4) Să se determine numerele complexe z cu proprietatea $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

5) Fie funcția $f : C - \{1\} \to C$, definită prin $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$. Să se determine:

   a) mulțimea A a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu Im f(z) = 0.

   b) mulțimea B a punctelor din planul complex care au ca afixe numerele complexe z cu Re f(z) = 0.

6) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, ecuațiile:

   $a) z^2 = -5 - 12i$

   $b) z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

   $c) z^3 + 2z^2 + 3z = 0$

   $d) z^2 - 3iz + i - 3 = 0$

7) Dacă α şi β sunt soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$, să se calculeze $E = (\alpha - 1)^{2010} + (\beta - 1)^{2010}$.

8) Arătați că numărul $z = (-1+i)^n + (-1-i)^n$ este real, $\forall n \in N$.

9) Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, să se afle $z^{2005} + \dfrac{1}{z^{2005}}$.

10) Fie z_1, $z_2 \in C$ astfel încât $|z_1 + z_2| = |z_1 z_2|$. Să se arate că $|z_1| \le 2$ sau $|z_2| \le 2$

11) Fie a ϵ R şi $z = \frac{1+i\sqrt{2}}{a-1+ai}$. Determinați valorile lui a pentru care z ϵ R.

12) Fie a,b ϵ R^* , n ϵ N şi $z = (a+ib)^n + (b+ai)^n$. Arătați că dacă $z \neq 0$, atunci $z \in R \Leftrightarrow n = 4k, k \in N$.

13) Să se rezolve în C ecuațiile:

a) $z^{n-1} = \overline{z}$ b) $\sum_{k=1}^{n}(-z)^k = -1, n \in N^*$ c) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = -1$

14) Să se arate că dacă $|z| = 1$, atunci $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$

15) Fie z = cost + isint, iar n ϵ N^*, atunci:

a)Să se demonstreze formulele: $\sin nt = \frac{z^{2n}-1}{2iz^n}$ şi $\cos nt = \frac{z^{2n}+1}{2z^n}$

b)Să se calculeze $8 \cdot \cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0$

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

1) a) Rezolvăm ecuația $|z| - 2z = 2 - 4i$, unde z = x+iy

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2iy = 2 - 4i$

$\Rightarrow$-2iy = -4i $\Rightarrow$y = 2 şi $\sqrt{x^2+4} = 2 + 2x \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-8}{3}$

Deci soluțiile sunt z_1 = 2i şi z_2 = $\frac{-8}{3}$ +2i.

b) Se rezolvă în mod analog cu punctul a) şi se obține soluția $z = \frac{-7}{6} + 4i.$

2)Fiez = x+iy, atunci

$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \Rightarrow |x-4+iy| = |x-8+iy| \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2$

$\Rightarrow$x = 6 şi analog utilizând ipoteza $\left|\frac{z-12}{zi+8}\right| = \frac{5}{3}$ vom avea y_1 = 17 şi y_2 = 8, adică numerele complexe căutate sunt z_1 = 6 + 17i şi z_2= 6 + 8i.

3) a) Prin calcul direct, folosind i^2 = -1, avem ca imagine punctul M(21; -1)

b) După amplificarea fracției cu 3-2i şi calculul direct se obține ca imagine un punct $N\left(\frac{9}{13};\frac{7}{13}\right)$

4) Pentru z = x+iy, avem 4(x^2 + 2xyi – y^2) + 8x^2 +8y^2 -3 = 0 $\Rightarrow$2xy = 0 şi

$12x^2 + 4y^2 = 3$. Dacă x = 0 $\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar dacă y = 0 $\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.

Deci numerele complexe căutate sunt: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = \frac{1}{2}, z_4 = -\frac{1}{2}$.

5) Funcția dată devine: $f(x+iy) = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{x^2-1-2iy+y^2}{(x-1)^2+y^2}$

a) Avem Im f(z) = 0 dacă y = 0 $\Rightarrow A = \{(x,y) \in P / y = 0\}$

b) Dacă Re f(z) = 0, atunci $B = \{(x,y) \in P / x^2 - 1 + y^2 = 0\}$.

6) a) $x^2 + 2xyi - y^2 = -5-12i \Rightarrow xy = -6$ şi $x^2 - y^2 = -5 \Rightarrow x = \pm 2, y = \mp 3$

Deci avem soluțiile: $z_1 = 2-3i, z_2 = -2+3i$.

b) Notăm $z^2 = t \Rightarrow t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = -1$ şi $t_2 = -4$, adică soluțiile ecuației sunt:

$z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2i, z_4 = -2i$.

c) $z(z^2 + 2z + 3) = 0 \Rightarrow z_1 = 0, z_2 = -1 + i\sqrt{2}, z_3 = -1 - i\sqrt{2}$.

d) $\Delta = -9 - 4i + 12 = 3 - 4i = (2-i)^2 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{3i \pm (2-i)}{2}$, adică soluțiile sunt:

$z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + 2i$.

7) Dacă α şi β sunt soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow \alpha - 1 = \alpha^2$ şi $\alpha^3 = -1$, iar $\beta - 1 = \beta^2, \beta^3 = -1$. Astfel

$E = \alpha^{2\cdot 2010} + \beta^{2\cdot 2010} = (\alpha^3)^{1340} + (\beta^3)^{1340} = 1 + 1 = 2$.

8) Folosim scrierea în formă trigonometrică astfel:

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Numărul: $z = \sqrt{2}^n \cdot \left(\cos\frac{3\pi n}{4} + \cos\frac{5\pi n}{4} + i\left(\sin\frac{3\pi n}{4} + \sin\frac{5\pi n}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^n \cdot 2\cos\pi n \cdot \cos\frac{\pi n}{4}$

pentru că $\sin\pi n = 0$, $\forall n \in N$.

9) Dacă $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z^n = 1$, $\forall n \in N$, atunci vom avea:

$z^{2005} + \frac{1}{z^{2005}} = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} = \frac{-z}{z} = -1$.

10) Dacă $|z_1 \cdot z_2| = |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| + 1 \le |z_1| + |z_2| + 1$

$\Rightarrow (|z_1| - 1) \cdot (|z_2| - 1) \le 1$

Presupunem că $|z_1| \succ 2$ şi $|z_2| \succ 2$, atunci avem $\Rightarrow (|z_1|-1)\cdot(|z_2|-1) \succ 1$

ceea ce contrazice relația găsită anterior; deci avem $|z_1| \leq 2$ sau $|z_2| \leq 2$.

11) Soluția 1:

z ϵ R $\Leftrightarrow \exists$ b ϵ R, cu z = b , ceea ce conduce la (a-1)b + abi = 1+i$\sqrt{2}$

Deoarece a,b ϵ R egalitatea de mai sus are loc $\Leftrightarrow$ (a-1)b = 1 şi ab = $\sqrt{2}$, de unde găsim a = 2 + $\sqrt{2}$.

Soluția 2:

$$z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z} \Rightarrow (1-i\sqrt{2})(a-1+ai) = (1+i\sqrt{2})(a-1-ai) \Rightarrow (a-1)\sqrt{2} = a \Rightarrow a = 2+\sqrt{2}.$$

12) Observăm că:

$$\bar{z} = \overline{(a+bi)^n} + \overline{(b+ai)^n} = (a-bi)^n + (b-ai)^n = (-i)^n \cdot \left[(a+bi)^n + (b+ai)^n\right] = (-i)^n \cdot z$$

de unde dacă se folosesc puterile lui i, avem:

$z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow n = 4k, \forall k \in N$.

13) a) Dacă n = 1 $\Rightarrow \bar{z} = 1 \Rightarrow z = 1$. Dacă n = 2 $\Rightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R.$

Fie n ≥ 3, se observă că z = 0 este o soluție. Presupunând $z \neq 0$ şi trecând la module avem: $|z^{n-1}| = |\bar{z}| = |z| \Rightarrow |z| = 1.$ Atunci

$z^n = z^{n-1} \cdot z = \bar{z} \cdot z = |z|^2 = 1$, obținând soluțiile:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1}.$$

b) Se scie ecuația echivalentă : $1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^{n-1}z^{n-1} = 0$, iar $z \neq -1$ rezultă $\frac{1-(-z)^n}{1+z} = 0.$

Dacă n este par, avem de dat soluțiile ecuației $z^n = 1$, adică:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1}.$$

Dacă n este impar, avem ecuația $z^n = -1$, ce are soluțiile:

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1}.$$

c) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = -1 \Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = \sqrt[n]{\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = \cos\frac{3\pi + 4k\pi}{2n} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{2n}, k = \overline{0, n-1}.$$

Notând $\alpha = \dfrac{3\pi + 4k\pi}{4n} \Rightarrow \dfrac{1 - iz}{1 + iz} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{2iz} = \dfrac{1 + \cos 2\varepsilon + i\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha + 1 - i\sin 2\alpha} = \dfrac{-1}{itg\alpha} = tg\alpha$. Se obțin soluțiile:

$$z_k = tg\frac{3\pi + 4k\pi}{4n}, k = \overline{0, n-1}.$$

14) Folosin ipoteza $|z| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = 2\cdot|z| = |2z| = \left|z^3 + 1 - z\left(z^2 + 1\right) - (z+1)\right| \le \left|z^3 + 1\right| + |z|\cdot\left|z^2 + 1\right| + |z+1|$

$\Leftrightarrow |z+1| + \left|z^2 + 1\right| + \left|z^3 + 1\right| \ge 2$.

15) a) Dacă z = = cost + isint, atunci:

$$z^n = \cos nt + i\sin nt$$

$$\overline{z}^{n} = \cos nt - i\sin nt$$

Prin adunarea acestor două relații rezultă $\cos nt = \dfrac{z^n + \overline{z}^{n}}{2}$, iar prin scăderea lor avem $\sin nt = \dfrac{z^n - \overline{z}^{n}}{2i}$.

Observăm, din ipoteză că $|z| = 1 \Rightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$, adică $\overline{z}^{n} = \dfrac{1}{z^n} \Rightarrow$

$$\cos nt = \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2} = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n} \text{ şi } \sin nt = \frac{z^n - \frac{1}{z^n}}{2i} = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}$$

b) Fie z = cos20^0 + isin20^0, atunci z^9 = -1 şi z^{18} = 1. folosind formulele demonstrate la punctul a)$\Rightarrow \cos 20^0 = \dfrac{z^2 + 1}{2z}, \cos 40^0 = \dfrac{z^4 + 1}{2z^2}, \cos 80^0 = \dfrac{z^8 + 1}{2z^4}$, pentru n = 1, n = 2, respectiv n = 4. Expresia căutată devine:

$$\frac{\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)\left(z^8+1\right)}{2z^7} = \frac{1 + z^2 + z^4 + ... + z^{16}}{z^7} = \frac{z^{16} - 1}{z^7\left(z^2 - 1\right)} = \frac{\frac{z^{18}}{z^2} - 1}{\frac{z^9}{z^7}\left(z^2 - 1\right)} = \frac{1 - z^2}{-\left(z^2 - 1\right)} = 1.$$

Deci $8\cdot\cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0 = 1$.